ZUSAMMENFASSENDE WIEDERHOLUNG ZU σ-UMGEBUNGEN

Varianz und Standardabweichung bei Binomialverteilungen:

Ist ein n-stufiger BERNOULLI-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p und Misserfolgswahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ gegeben und betrachtet man die Zufallsgröße
X: *Anzahl der Erfolge*, so gelten folgende Formeln:
Der Erwartungswert $E(X) = \mu = n \cdot p$
Die Varianz $V(X) = n \cdot p \cdot q$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$.

Aufgabe 1: Berechnen Sie für die binomialverteilte Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge*...

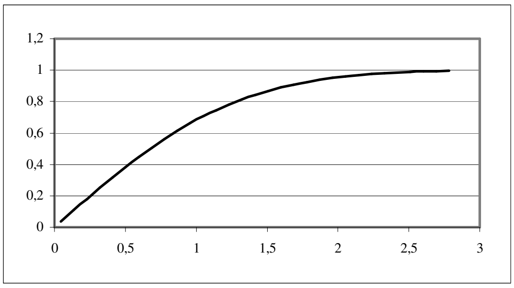
a) die Varianz und die Standardabweichung für $n = 100$ und $p = 0{,}1; 0{,}2; ...; 0{,}9$.
Für welche Wahrscheinlichkeit p streut die Verteilung am stärksten?

b) die Varianz und die Standardabweichung für $p = 0{,}3$ und $n = 50; 500; 5000$. Warum wächst das Streuungsmaß mit steigendem n?

Regeln über σ-Umgebungen von μ:

Vielfach interessiert einen die Fragestellung, wie viele Versuchsergebnisse in der Nähe des Erwartungswertes liegen. Dazu legt man eine Umgebung mit Radius r um den Erwartungswert μ und schaut sich an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Versuchsergebnisse in dieser Umgebung liegen. Wählt man als Radius ein Vielfaches von σ, so stellt man fest:

Jedem Radius (als Vielfaches von σ) einer Umgebung von μ lässt sich eine bestimmte Umgebungswahrscheinlichkeit zuordnen. Umgekehrt lässt sich jeder Umgebungswahrscheinlichkeit für Umgebungen von μ ein bestimmter Radius (als Vielfaches von σ) zuordnen. Dies gilt unabhängig von der Erfolgswahrscheinlichkeit p, die dem n-stufigen BERNOULLI-Versuch zugrunde liegt.



Der abgebildete Graph veranschaulicht diesen Zusammenhang. Die genaue Zuordnung *Radius $\rightarrow$ Umgebungswahrscheinlichkeit* finden Sie in Ihrem Buch auf Seite 504.

Aufgabe 2: Füllen Sie die folgende Tabelle mit den wichtigsten Umgebungswahrscheinlichkeiten aus. Dies sind die sogenannten σ-Regeln.

Radius der Umgebung	Wahrscheinlichkeit der Umgebung
1σ	
2σ	
3σ	

Wahrscheinlichkeit der Umgebung	Radius der Umgebung
0,90	
0,95	
0,99	

Aufgabe 3: Überzeugen Sie sich von der Unabhängigkeit der σ-Regeln für $n = 100$ und $p = 0{,}1; 0{,}2; ...; 0{,}5$, indem Sie jeweils den Radius der 70%-, 90%- und 95%-Umgebung berechnen und anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Tabelle auf Seite 503 überprüfen.

Aufgabe 4: Gegeben sind n-stufige BERNOULLI-Versuche. Bestimmen Sie

a) $n = 350$; $p = 0{,}24$; $P(74 \leq X \leq 94)$

b) $n = 660$; $p = 0{,}75$; $P(482 \leq X \leq 508)$

c) $n = 240$; $p = 0{,}45$; $P(X < 100)$

d) $n = 1100$; $p = 0{,}83$; $P(X \geq 919)$

e) $n = 2400$; $p = 0{,}36$; $P(X > 857)$

f) $n = 3998$; $p = 0{,}5$; $P(X \leq 2050)$

Weitere Aufgaben im Buch auf Seite 444 – 447.

LÖSUNGEN:

a) $\sigma = 7{,}99$, $\mu = 84$, $r = 10{,}5 = 1{,}314 \cdot \sigma \Rightarrow P = 81\%$

b) $\sigma = 11{,}12$, $\mu = 495$, $r = 13{,}5 = 1{,}21 \cdot \sigma \Rightarrow P = 77{,}4\%$

c) $\sigma = 7{,}70$, $\mu = 108$, $r = 8{,}5 = 1{,}10 \cdot \sigma \Rightarrow P = (100\%-72{,}9\%)/2 = 13{,}55\%$

d) $\sigma = 12{,}46$, $\mu = 913$, $r = 6{,}5 = 0{,}52 \cdot \sigma \Rightarrow P = (100\%-39{,}7\%)/2 = 30{,}15\%$

e) $\sigma = 23{,}51$, $\mu = 864$, $r = 6{,}5 = 0{,}28 \cdot \sigma \Rightarrow P = 100\%-(100\%-22{,}1\%)/2 = 61{,}05\%$

f) $\sigma = 31{,}61$, $\mu = 1999$, $r = 51{,}5 = 1{,}63 \cdot \sigma \Rightarrow P = 100\%-(100\%-89{,}7\%)/2 = 94{,}85\%$